

# AKILLI BİR KİRİŞİN VARSAYILAN BİÇİMLER METODU İLE UZAMSAL SİSTEM MODELİNİN ELDE EDİLMESİ ve ELDE EDİLEN MODELİN İYİLEŞTİRİLMESİ

## (SPATIAL SYSTEM IDENTIFICATION OF A SMART BEAM BY ASSUMED MODES METHOD and THE MODEL CORRECTION)

Ömer Faruk KIRCALI<sup>1,2</sup>

e-posta: [fkircali@stm.com.tr](mailto:fkircali@stm.com.tr)

Volkan NALBANTOĞLU<sup>1</sup>

e-posta: [volkan@ae.metu.edu.tr](mailto:volkan@ae.metu.edu.tr)

Melin ŞAHİN<sup>1</sup>

e-posta: [msahin@metu.edu.tr](mailto:msahin@metu.edu.tr)

Yavuz YAMAN<sup>1</sup>

e-posta: [yyaman@metu.edu.tr](mailto:yyaman@metu.edu.tr)

Fatih Mutlu KARADAL<sup>1</sup>

e-posta: [karadal@ae.metu.edu.tr](mailto:karadal@ae.metu.edu.tr)

<sup>1</sup> Havacılık ve Uzay Mühendisliği Bölümü, ODTÜ, ANKARA

<sup>2</sup> Savunma Teknolojileri Mühendislik ve Ticaret A.Ş., ANKARA

### ÖZET

Bu çalışmada, akıllı bir kirişin gürbüz (robust) kontrol tasarımına uygun uzamsal (spatial) sistem modelinin elde edilmesi için “Varsayılan Biçimler” (Assumed-Modes) metodu ile modellenmesi ve elde edilen sistem modelinin iyileştirilmesi sunulmuştur. Akıllı kiriş bir kenarı tutturulmuş, diğer kenarı serbest pasif bir alüminyum kirişten ve bunun her iki yüzeyine simetrik olarak yapıştırılmış piezoelektrik yamalardan oluşmuştur. Çalışmanın ilk bölümünde, akıllı kirişin ilk 50 eğilme titreşim biçiminden oluşan analitik sistem modeli, yaklaşık modelleme tekniği olan “Varsayılan Biçimler” metodu kullanılarak elde edilmiştir. Denetçi tasarımı düşünülerek, yüksek ölçekli sistem modeli direkt model indirgeme (direct model truncation) ile ilk 2 eğilme titreşim biçimini gözönüne alan sistem modeli haline getirilmiş ve model indirgeme sonucundaki modelin ilk modelden uzaklaşma davranışı incelenmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde ise, indirgenmiş sistem modelinin iyileştirilerek yüksek ölçekli sistem modeline yaklaşık hale getirilmesi incelenmiştir. Yüksek frekanstaki biçim şekillerinin de düşük frekanstaki sistem dinamiğine etkileri olduğu bilinerek belirli sayıdaki yüksek frekanstaki biçim şekillerinin modele dahil edilmesinin etkisi araştırılmıştır.

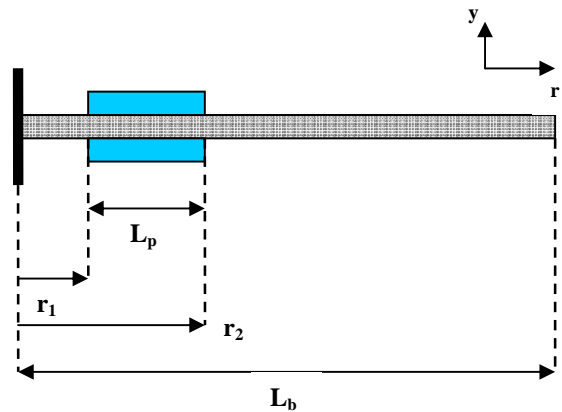
### I. GİRİŞ

Akıllı yapılar dışarıdan uygulanan bir uyarıyı algılayabilen ve buna aktif denetim mekanizmaları yardımıyla cevap veren yapılardır. Akıllı yapılarda, algılayıcı ve uyarıcılar yapının aktif parçalarını oluşturmaktadırlar. Şekil 1’de görülen, çalışmamızda

kullandığımız akıllı kirişi oluşturan alüminyum yapının ve piezoelektrik yamaların yapısal özellikleri Tablo 1’de belirtilmiştir. ‘b’ alt indisi kirişi, ‘p’ alt indisi piezoelektrik yamayı ifade etmektedir.

### II. AKILLI KİRİŞİN MODELLENMESİ

Akıllı kiriş bir kenarı tutturulmuş, diğer kenarı serbest pasif bir alüminyum kirişten ve bunun her iki yüzeyine simetrik olarak yapıştırılmış piezoelektrik yamalardan oluşmuştur. Bir kenarı tutturulmuş diğer kenarı serbest sınır durumları temel havacılık yapılarında sıkça karşılaşılan sınır durumlarıdır.



Şekil 1. Akıllı kirişin yandan görünüşü

Bu konfigürasyondaki akıllı kirişin analitik olarak sistem modelinin elde edilmesi için “Varsayılan Biçimler” metodu kullanılmıştır. Bu yöntem özdeğer problemini ve sınır durumlarını sağlayan

özfonksiyonların bilinmediği durumlarda oldukça geçerli bir yöntemdir.

**Tablo 1.** Akıllı kirişin yapısal özellikleri

	Alüminyum Kiriş	PZT (Sensortech BM500)
Boy	$L_b = 0.494$ m	$L_p = 0.05$ m
En	$w_b = 0.051$ m	$w_p = 0.04$ m
Kalınlık	$t_b = 0.002$ m	$t_p = 0.0005$ m
yoğunluk	$\rho_b = 2710$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_p = 7650$ kg/m <sup>3</sup>
Young büyüklüğü	$E_b = 69$ Gpa	$E_p = 64.52$ GPa
kesit alanı	$A_b = w_b t_b$	$A_p = w_p t_p$
PZT yük sabiti		$d_{31} = -175 \cdot 10^{-12}$

“Varsayılan Biçimler” metodu, yapının yerdeğiştirme ifadesini, sistemin sınır durumlarını ve matematiksel denklemini sağlayan, N tane kabul edilebilir özfonksiyonun (eigenfunction),  $\phi_i$ , genelleştirilmiş koordinatlarla yani zamana bağlı katsayılarla,  $q_i$ , çarpımıyla ifade eder [1].

$$y(r, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(r) q_i(t) \dots\dots\dots(1)$$

Burada ‘r’ boylamasına eksen, ‘t’ ise zamanı simgeler. Akıllı kirişin kinetik ve potansiyel enerji ifadeleri, bir Euler-Bernoulli kiriş için geçerli olan kinetik ve potansiyel enerji ifadelerine [1] piezoelektrik malzemelerin etkileri de katılarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$T = (T_b)_{r_1}^{r_2} + (T_b + 2T_p)_{r_1}^{r_2} + (T_b)_{r_2}^{L_b}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \int_0^{L_b} \rho_b A_b (\dot{y})^2 dr + 2 \int_{r_1}^{r_2} \rho_p A_p (\dot{y})^2 dr \right] \dots\dots(2)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N \left[ \int_0^{L_b} \rho_b A_b \phi_i \phi_j dr + 2 \int_{r_1}^{r_2} \rho_p A_p \phi_i \phi_j dr \right] \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Benzer şekilde, akıllı kirişin potansiyel enerji ifadesi ise:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{L_b} E_b I_b (y'')^2 dr + \int_{r_1}^{r_2} E_p I_p (y'')^2 dr$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i^N \sum_j^N \left[ \int_0^{L_b} E_b I_b \phi_i'' \phi_j'' dr + 2 \int_{r_1}^{r_2} E_p I_p \phi_i'' \phi_j'' dr \right] q_i q_j \dots\dots(3)$$

Sistemin sönümlenmesi akıllı kirişin içsel sönümlenme davranışından kaynaklanmaktadır. Dışsal uyarma momentinin sistem üzerine uyguladığı kuvvetin yaptığı işin ifadesi ise:

$$Q_i = \int_0^{L_b} \frac{\partial^2 (M_a)}{\partial r^2} (\phi_i) dr$$

$$= 2C_p V_a \int_0^{L_b} [H''(r - r_1) - H''(r - r_2)] \phi_i dr \dots\dots\dots(4)$$

$$= 2C_p V_a [\phi_i'(r_2) - \phi_i'(r_1)]$$

Denklemdaki  $C_p = E_p d_{31} w_p (t_p + t_b)$  uyarma momentinden  $M_p = C_p V_a(t)$  kaynaklanan geometrik bir sabittir [2]. Sistemin denklemlerinin ortaya çıkarılması Lagrange prensibi yardımıyla olmaktadır[1]:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \dots\dots\dots(5)$$

Bu çalışmada akıllı kirişin özfonksiyonları,  $\phi_i$  değerleri, yerine aynı sınır durumlarına sahip, benzer bir pasif kirişin özfonksiyonları varsayılmıştır.

$$\phi_i(r) = L_b (\cosh \beta r - \cos \beta r - \alpha (\sinh \beta r - \sin \beta r)) \dots\dots(6)$$

ve,

$$\alpha = \frac{\cosh \beta L_b + \cos \beta L_b}{\sinh \beta L_b + \sin \beta L_b} \dots\dots\dots(7)$$

Bu özfonksiyonlar kendi aralarında ortogonaldirler [3]:

$$\int_0^{L_b} \rho_b A_b \phi_i(r) \phi_j(r) dr = \rho_b A_b L_b^3 \delta_{ij} \dots\dots\dots(8)$$

$$\int_0^{L_b} E_b I_b \phi_i''(r) \phi_j''(r) dr = \rho_b A_b L_b^3 \omega_i^2 \delta_{ij} \dots\dots\dots(9)$$

Enerji ve kuvvet ifadelerini Lagrange denkleminde yerine koyup, ortogonalite durumunu da gözönüne alarak çözümlenen ve belirli bir sönümlenme değeri eklenmiş sistemin hareket denklemi aşağıdaki şekildedir:

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \frac{C_p V_a(t) [\phi_i'(r_2) - \phi_i'(r_1)]}{\{\rho A L^3\}_c} \dots\dots(10)$$

ve,

$$\{\rho A L^3\}_c = \rho_b A_b L_b^3 + 2\rho_p A_p L_p^3 \dots\dots\dots(11)$$

(10) numaralı denklemdeki  $\xi_i$  ve  $\omega_i$ , her titreşim biçimindeki sönümlenme oranı ile rezonans frekansını ifade eder. Zaman düzlemindeki bu ifadeyi frekans düzlemine taşımak için Laplace dönüşümü ele alınır. Yerdeğiştirme ifadesi (1), yerine koyulduğunda oluşan, sistemin uyarın voltaj ile ölçülen yerdeğiştirmesi arasındaki aktarım işlevinin (transfer function) uzamsal ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\frac{Y(r,s)}{V_a(s)} = G_N(s) = \sum_{i=1}^N \frac{C_p \phi_i(r) [\phi'_i(r_2) - \phi'_i(r_1)]}{\{\rho AL^3\}_c (s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2)} \quad (12)$$

### III. MODEL İNDİRGE ME

Yapısal titreşimleri sönmölemek için denetçi tasarlanmasındaki amaç genellikle düşük frekanstaki titreşim biçimlerinin sönmölenmesini sağlamaktır. Özellikle havacılık yapılarında, ilgilenilen titreşim biçimleri çoğu zaman ilk birkaç titreşim biçiminden oluşur. Çünkü yüksek frekanslardaki titreşim biçimlerinin sönmölenmesini amaçlamak pratikte uygulanabilirliği çok düşük bir denetçi tasarımına yolaçmaktadır. Denetçinin ölçeğinin sistemin ölçeğiyle aynı ya da daha düşük olması denetçi tasarımında hedeflenen bir kriterdir. Çok yüksek ölçekli bir denetçi tasarlamak ve bu denetçiyi gerçek sistemde hayata geçirmek hem hesaplama hem de uygulama açısından oldukça maliyetlidir. Bu maliyetten kurtulmak için tasarlanan denetçinin ölçeği küçültölmelidir. Ancak bu durum sistemde hem performans hem de sabitlik (stability) kaybına yol açabilir. Bu yüzden, daha doğru olan yaklaşım, öncelikle sistem modelinin indirgenerek küçültölmömesi, daha sonra da indirgenmiş model üzerine denetçi tasarlanmasıdır.

Akıllı kirişin ilk N titreşim biçiminden oluşan analitik sistem modelinin uzamsal ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$G_N(s) = \sum_{i=1}^N \frac{P_i \phi_i(r)}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (13)$$

$$\text{Burada, } P_i = \frac{C_p [\phi'_i(r_2) - \phi'_i(r_1)]}{\{\rho AL^3\}_c} \quad (14)$$

İlk N titreşim biçiminden oluşan bu model, "tam model" olarak adlandırılmıştır.

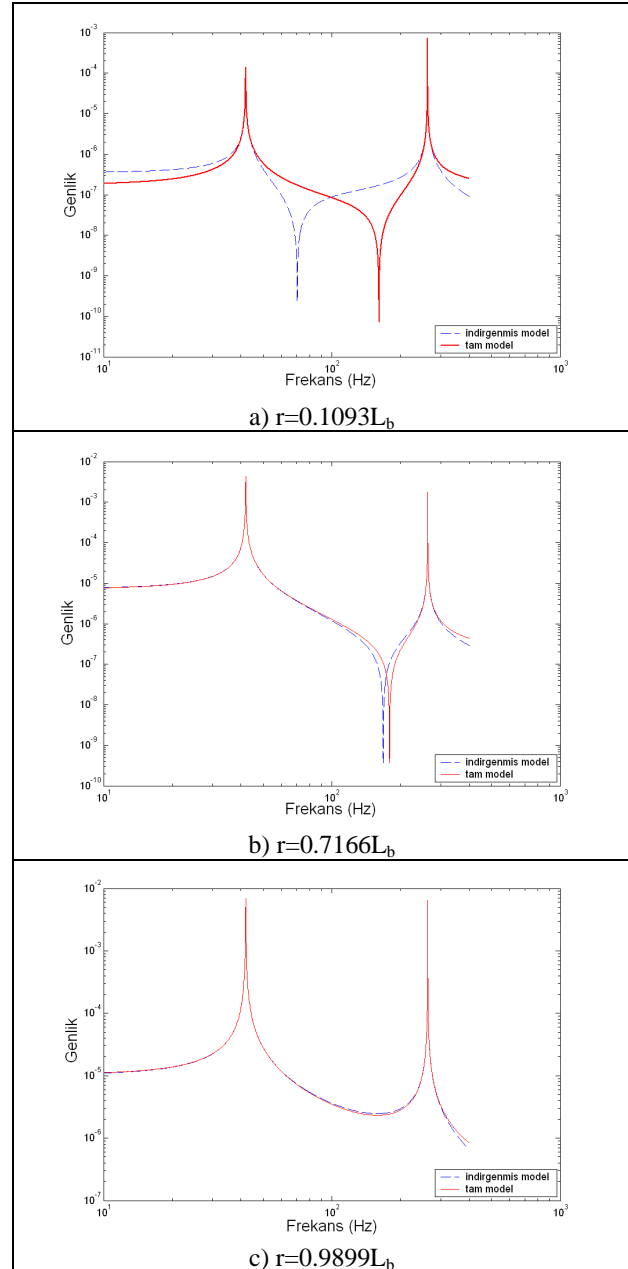
Sistemin modeli direkt model indirgeme metoduyla ilk M titreşim biçimini göz önüne alacak hale getirilerek

$$G_M(s) = \sum_{i=1}^M \frac{P_i \phi_i(r)}{s^2 + 2\xi_i \omega_i s + \omega_i^2} \quad (15)$$

şekline dönüştürölmüşür. İlk iki titreşim biçiminden oluşan bu model, "indirgenmiş model" olarak adlandırılmıştır.

Model indirgeme sonucu, indirgenmiş model ile tam modelin arasında fark olması kaçınılmazdır. Çünkü yüksek frekanstaki titreşim biçimlerinin dışarıda bırakılması ilgilendiğimiz frekans aralığındaki sistem dinamiğini etkilemektedir. Bu çalışmada, tam modelin ilk 50 (N=50), indirgenmiş modelin ise ilk 2 (M=2) titreşim biçimi gözönüne alınmıştır. Bu

bağlamda, Şekil 2'de, kiriş üzerindeki çeşitli noktalardan ölçüm yapıldığı varsayımıyla elde edilen örnek sistem modelleri ve model indirgeme sonucu tam modelden sapma gösterilmiştir.



Şekil 2. Akıllı kirişin üzerindeki çeşitli noktalardaki frekans cevabı

Özellikle, tutturulmuş sınıra yakın yerlerde modeller arası farkın daha çok olduğu ancak serbest uca yakın

yerlerde bu farkın çok fazla olmadığı görülmüştür. Bunun sebebi, serbest ucun tüm titreşim biçimindeki hareketinde bir sınırlama olmamasıdır. Bilindiği gibi bu tip sistemlerin modellenmesi sistem tanımlama tekniği kullanılarak da yapılabilmektedir. Algılayıcılar, titreşimin en belirgin gözlenebildiği yer olan serbest uca çok yakın noktalarda kullanılmaktadırlar. Bu durumda elde edilen sistem modelinin gerçekteki sistem modelinden sapmadığı düşüncesiyle tasarlanan denetçi sistemin diğer noktalarındaki titreşimleri sönmülemekte etkisiz kalabilmektedir. Bu durumu ortadan kaldırmak için sistemi uzamsal olarak incelemek gerekir. Bu yüzden, indirgenmiş model, yüksek frekanstaki titreşim biçimlerin bir kısmı da modele dahil edilerek [4] iyileştirilmelidir.

#### IV. MODEL İYİLEŞTİRME

İndirgenmiş model iyileştirilirken [5, 6, 7] yüksek frekanstaki biçim şekillerin de sisteme dahil edilmesi, modelin gerçek sistem modeline bir hayli yaklaştığını göstermiştir. Genel anlamda  $G_N(s)$ 'den (tam model),  $G_M(s)$ 'e (indirgenmiş model) model indirmek, sistemin sıfırlarının (zeros) kaymasına ve DC (sıfır frekans – zero frequency) hatasına yol açmaktadır [4]. Model indirgmeden kaynaklanan hata özellikle kapalı döngü sistemler için tasarlanan denetçinin gürbüzlüğüne etkileyebilmektedir. Bu yüzden modeli iyileştirmek ve de ilgilendiğimiz frekans aralığı dışında kalan biçim şekillerden kaynaklanan hatayı azaltmak için indirgenmiş modele düzeltici  $\tilde{K}$  değeri eklenmiştir.

$$\tilde{G}(s) = G_M(s) + \tilde{K} \quad \text{.....(16)}$$

$\tilde{K}$ 'nin genel ifadesi aşağıdaki şekildedir:

$$\tilde{K} = \sum_{i=M+1}^N \phi_i(r) K_{ri} \quad \text{.....(17)}$$

$K_{ri}$  değerleri aşağıdaki maliyet denklemini minimum yapan değerlerden oluşur[5]:

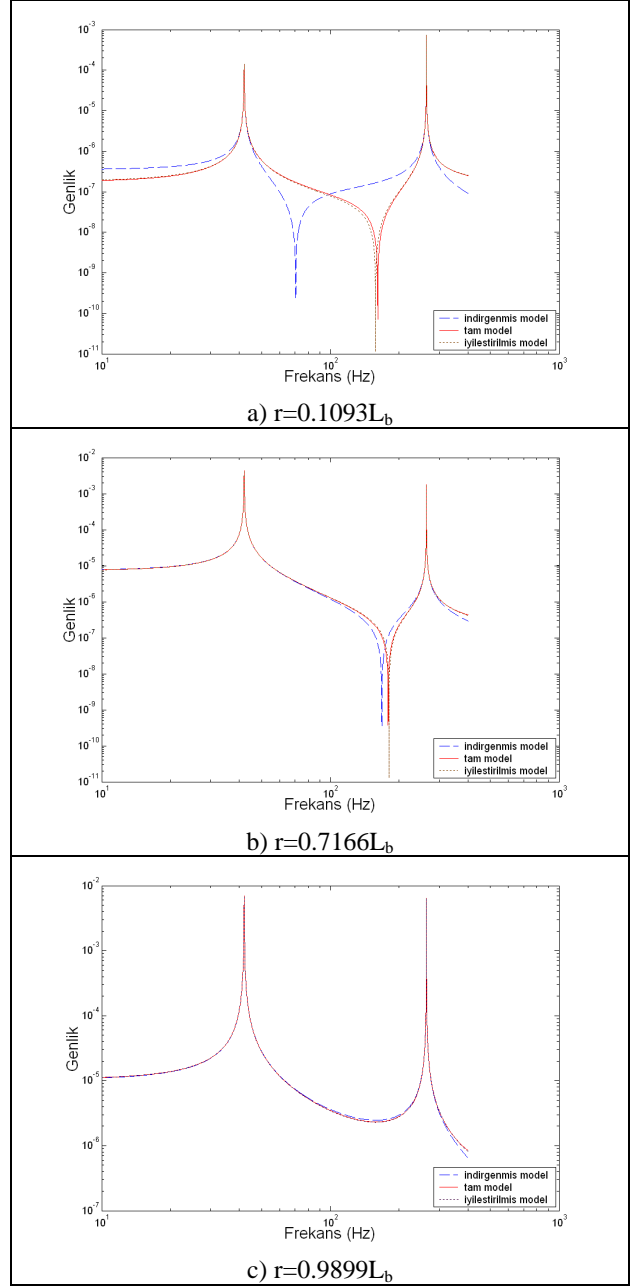
$$J = \langle\langle W_r(s,r)(G_N(s) - \tilde{G}(s)) \rangle\rangle_2^2 \quad \text{.....(18)}$$

Buradaki  $\langle\langle \dots \rangle\rangle_2$  ifadesi sistemin uzamsal 2-norm,  $W_r(s,r)$  ise düşük frekans geçiş filtresidir.

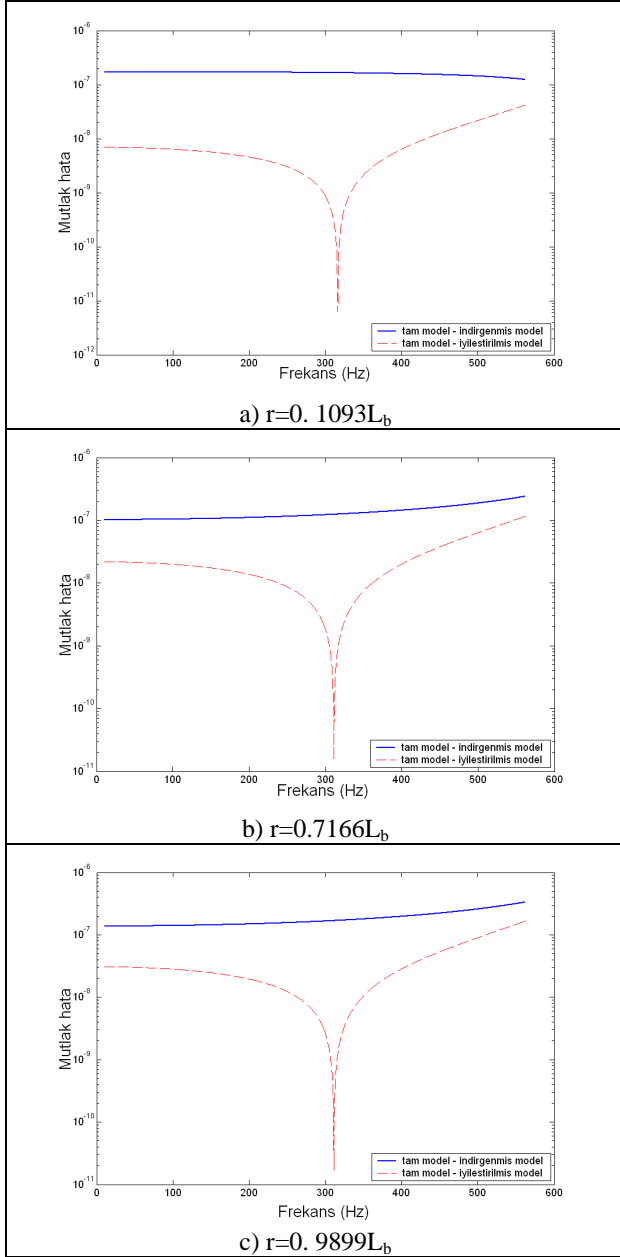
$K_{ri}$ 'nin optimum değeri aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır [8]:

$$K_{ri}^{\text{opt}} = \frac{1}{4\omega_i \omega_i} \frac{1}{\sqrt{1-\xi_i^2}} \ln \left\{ \frac{\omega_i^2 + 2\omega_i \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2} + \omega_i^2}{\omega_i^2 - 2\omega_i \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2} + \omega_i^2} \right\} P_i \quad \text{.....(19)}$$

Şekil 3'te kiriş üzerindeki çeşitli noktalardan ölçüm yapıldığı varsayımıyla elde edilen örnek sistem modelleri gösterilmiştir. Model iyileştirme sonucu tam modele yaklaşma da Şekil 4'te, indirgenmiş ve iyileştirilmiş modellerin tam modelden mutlak farkının frekansla değişimi şeklinde verilmiştir.



Şekil 3. Akıllı kirişin üzerindeki çeşitli noktalardaki iyileştirilmiş frekans cevabı



Şekil 4. Akıllı kirişin üzerindeki çeşitli noktadaki indirgenmiş ve iyileştirilmiş modellerin tam modelden mutlak farkı

## V. SONUÇLAR

Sistem üzerindeki çeşitli noktalar referans alınarak oluşturulan analitik modeller için tam model ile indirgenmiş model arasındaki mutlak fark hata olarak değerlendirilmiştir. Model iyileştirmenin etkisini araştırmak için de tam model ile iyileştirilmiş model arasındaki bu hata karşılaştırılmış ve iyileştirilmiş modelin tam modelden daha az sapma gösterdiği gözlemlenmiştir. Bu durum düşük frekanstaki titreşimlerin sönümlenmesi çalışmalarında düşük ölçeğe indirgenmiş model yerine iyileştirilmiş modelin kullanılmasının daha etkin olacağını ortaya koymaktadır.

## VI. KAYNAKLAR

- [1] Meirovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, The MacMillan Company, 1967.
- [2] Pota, H.R., Alberts, T.E. "Multivariable Transfer Functions for a Slewing Piezoelectric Laminate Beam", IEEE Systems Engineering, 1992.
- [3] Pota, H.R., Moheimani R., Smith, M. "Resonant Controllers for Smart Structures", Smart Materials and Structures, 2002
- [4] Hughes, P.C. "Space Structure Vibration Modes: How Many exist? Which Ones Are Important?", IEEE Control Systems, 1987.
- [5] Moheimani, S.O.R., Clark, R.L "Minimizing the Truncation Error in Assumed Modes Models of Structures", Transactions of the ASME, Journal of Vibration & Acoustics, 2000.
- [6] Moheimani, S.O.R., "Minimizing the Effect of out of Bandwidth Modes in Truncated Structure Models", ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2000.
- [7] Moheimani, S.O.R, Halim D., Fleming A.J., Spatial Control of Vibration: Theory and Experiments, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2003.
- [8] Halim, D., Vibration Analysis and Control of Smart Structures, PhD. Thesis, University of New Castle, August 2002.